Mathematik II für Chemiker (Bachelor)

Übung 2

1. Berechnen Sie die Matrixprodukte $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Welche besondere Eigenschaft besitzen die Matrizen $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$?

2. Berechnen Sie die inversen Matrizen und die Determinanten der folgenden Matrizen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   indem Sie die Matrix durch elementare Umformungen auf Diagonalform bringen.

bitte wenden

5. Zeigen Sie ohne explizites Berechnen der Determinanten, dass die Determinanten verschwinden:

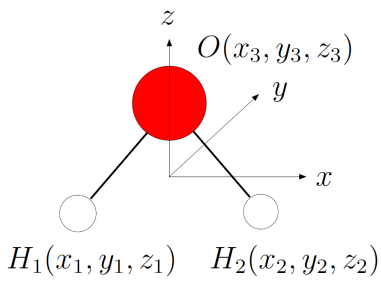
$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -20 & 15 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 5 & -7 \\ 2 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 14 & 8 \end{vmatrix}$$

6. Unter einer Symmetrieoperation eines Moleküls versteht man eine geometrische Transformation (lineare Abbildung), welche das Molekül mit sich selbst zur Deckung bringt. Beim Wassermolekül existieren vier solcher Symmetrieoperationen:

- Einheitsoperation
- Drehung um die z-Achse um 180° ("C_2-Achse")
- Spiegelung an der xz-Ebene ("σ_{xz}-Ebene")
- Spiegelung an der yz-Ebene ("σ_{yz}-Ebene")



Stellen Sie die jeweiligen 9×9 -Transformationsmatrizen $\mathbf{A}_E$, $\mathbf{A}_{C_2}$, $\mathbf{A}_{\sigma_{xz}}$ und $\mathbf{A}_{\sigma_{yz}}$ auf!

7. $\mathbf{A}$ sei eine Abbildungsmatrix mit der Eigenschaft

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathbf{A}$!
(Hinweis: Formulieren Sie die Problemstellung in der Form $\mathbf{AB} = \mathbf{B}'$.)